2016 東大理系数学 第1問

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

前半戦

$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < e$ かつ $e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ 後半戦

まず始めに、$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < e$ を示す。$(x>0)$

前半戦スタート

(xの式) < 定数 の比較なので、単に左辺の最大値を調べれば良い。

$f_1(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ とする

$y = x^x$ の微分は log をとるのが定石

$\log f_1(x) = x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$$\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} = 1\cdot\log\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\cdot\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$= \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

$f_1(x)$ の最大値を知るために、$f_1'(x)=0$ を解きたいが、解がわからないので、もう一回微分することにする。ちなみに東大数学では、1回で済む方がレア。

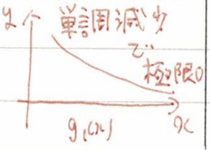
$g_1(x) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ とおくと、

$\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}$ の右辺

$$g_1'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} - \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$= \cdots = -\frac{1}{x(x+1)^2} < 0$$ よって $g_1(x)$ は単調減少。

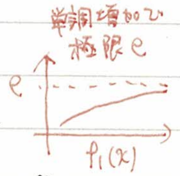
$$\lim_{x\to+\infty} g_1(x) = \lim_{x\to+\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right\} = 0$$



よって $g_1(x) > 0$ である

$\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} = g_1(x)$ であり $f_1(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > 0$ なので、

$f_1'(x)$ と $g_1(x)$ の符号は一致する。



また、$g_1(x) > 0$ なので、$f_1'(x) > 0$

よって、$f_1(x)$ は単調増加である。

$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = e =$ (右辺) なので、$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < e$ である

前半戦終了

整理

①と②の合わせ技で $f_1(x) < e$.

$f_1(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \longrightarrow e\ (x\to\infty)$　② 　①と②の合わせ技で $g_1(x) > 0$ ①

$$\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} = g_1(x) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \longrightarrow 0\ (x\to\infty)$$

符号が一致

$$g_1'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2} < 0$$ 単調減少 ①

次に $e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ を示す　後半戦スタート

でも前半戦とほぼ同じ

$f_2(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ とおくと、

$\log f_2(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ なので、

$$\frac{f_2'(x)}{f_2(x)} = 1\cdot\log\left(1+\frac{1}{x}\right) + \left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{-\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x+\frac{1}{2}}{x(x+1)}$$ 解がわからないので、もう一回微分

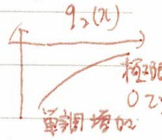
$g_2(x) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x+\frac{1}{2}}{x(x+1)}$ とおく。

計算省きました

$$g_2'(x) = \cdots\cdots = \frac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0$$

よって、$g_2(x) = \frac{f_2'(x)}{f_2(x)}$ は単調増加。

$$\lim_{x\to+\infty} g_2(x) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x+\frac{1}{2}}{x(x+1)} = 0$$



よって $g_2(x) < 0$

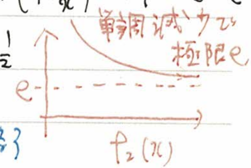
$g_2(x) = \frac{f_2'(x)}{f_2(x)}$ で、$f_2(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} > 0$ より、

$g_2(x)$ と $f_2'(x)$ の符号が一致、$g_2(x) < 0$ なので、

$f_2'(x) < 0$

よって、$f_2(x)$ は単調減少

$$\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = 1^{\frac{1}{2}} \times e = e$$



よって、$f_2(x) > e$ ∴ $e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

後半戦終了

以上より

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$ が示された。

LOOSE-LEAF 7mm ruled x 31 lines